POLINOMI

Def:

Si dice POLINOMIO la **somma algebrica** di più monomi, detti **TERMINI** del polinomio.

Esempi:

$$2a^2b^3 + 3b^2 + 5a^4$$

$\frac{5}{2ab^4} - \frac{3ab}{c^2}$ polinomio fratto

Def:

Un polinomio si dice RIDOTTO A FORMA NORMALE se in esso **non** compaiono termini simili e se tutti i suoi monomi sono scritti in forma normale.

Regola per** la **RIDUZIONE A FORMA NORMALE:

si deve eseguire la somma algebrica (somma o sottrazione) dei monomi simili.

Es:

$$x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - x^2y - 2x^3 + y^3 =$$

$$-1x^3 - 4x^2y + 2xy^2 + y^3 \rightarrow \text{è RIDOTTO A FORMA NORMALE}$$

ADDIZIONE ALGEBRICA

Valgono le seguenti <u>regole:</u>

- **se davanti ad una parentesi c'è il segno +, si eliminano le parentesi e il segno e si riscrivono tutti i termini del polinomio così come sono.**

<u>Esempio:</u>

$+(2a^3b - 4bc^4) + (-5a^3b - 3bc^4) =$

 tolgo il + e le parentesi

$+2a^3b - 4bc^4 - 5a^3b - 3bc^4 =$

 somma algebrica tra monomi simili

$+2a^3b - 5a^3b - 4bc^4 - 3bc^4 =$

$-3a^3b - 7bc^4$

- **se davanti ad una parentesi c'è il segno – , si eliminano le parentesi e il segno e si riscrivono tutti i termini del polinomio con il segno opposto.**

<u>Esempio:</u>

$(2a^3b - 4bc^4) - (-5a^3b - 3bc^4) =$

 tolgo il – e le parentesi e cambio tutti i segni all'interno

$2a^3b - 4bc^4 + 5a^3b + 3bc^4 =$

 <u>somma algebric</u>a tra monomi simili

$+7a^3b - 1bc^4$

Osservazione:

se nella somma algebrica tra polinomi compaiono due termini **OPPOSTI**, si annullano a vicenda.

__Esempio:__

$$3a^2b^2 + 5c^3 - \left(-4a^2b^2 + 5c^3\right) =$$

$$3a^2b^2 + 5c^3 + 4a^2b^2 - 5c^3 = 7a^2b^2$$

Esempio:

$$\tfrac{1}{3}x - \left[\tfrac{5}{6}x - \left(+\tfrac{1}{2}x + y\right) - \tfrac{2}{3}y\right] - \tfrac{5}{3}y + x =$$

$$\tfrac{1}{3}x - \left[+\tfrac{5}{6}x - \tfrac{1}{2}x - y - \tfrac{2}{3}y\right] - \tfrac{5}{3}y + x =$$

$$\tfrac{1}{3}x - \tfrac{5}{6}x + \tfrac{1}{2}x + y + \tfrac{2}{3}y - \tfrac{5}{3}y + x =$$

$$\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{2} + 1\right)x + \left(1 + \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{3}\right)y =$$

$$\tfrac{2-5+3+6}{6}x + \tfrac{+3+2-5}{3}y =$$

$$\tfrac{6}{6}x + 0\,y = x$$

MOLTIPLICAZIONE

1. POLINOMIO PER MONOMIO

Per moltiplicare un POLINOMIO per un MONOMIO, o viceversa, si deve moltiplicare ciascun termine del polinomio per il monomio e addizionare algebricamente i prodotti parziali ottenuti.

Es:

$$6ab\cdot(a-b) =$$

$$(6ab)\cdot(+a) + (6ab)\cdot(-b) =$$

$$+6a^2b - 6ab^2$$

⍰ si applica la proprietà DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO rispetto alla somma/sottrazione.

2. POLINOMI PER POLINOMI

Per moltiplicare un POLINOMIO per un altro POLINOMIO, si deve moltiplicare ciascun termine di un polinomio per ogni termine dell'altro polinomio e addizionare algebricamente i prodotti parziali ottenuti.

<u>*Esempio:*</u>

$$(3a+4b)(a-2b) =$$

$$3a\cdot a + 4b\cdot a + 3a\cdot(-2b) + 4b\cdot(-2b) =$$

$$3a^2 + 4ab - 6ab - 8b^2 =$$

$$3a^2 - 2ab - 8b^2$$

OSSERVAZIONE:

nella moltiplicazione i termini in uscita sono in numero uguale al prodotto del numero dei termini del primo polinomio per il numero dei termini del secondo.

3. PIÙ POLINOMI MOLTIPLICATI

Es:

$$(a - \frac{1}{3}b) \cdot (a - \frac{3}{2}b) \cdot (3a + 3b) =$$

→ si moltiplicano le prime due parentesi

$$(a^2 - \frac{3}{2}ab - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{2}b^2) \cdot (3a + 3b) =$$

→ si riduce a forma normale il polinomio ottenuto

$$(a^2 - \frac{11}{6}ab + \frac{1}{2}b^2) \cdot (3a + 3b) =$$

$$3a^3 + 3a^2b - \frac{11}{2}\ a^2b - \frac{11}{2}ab^2 + \frac{3}{2}ab^2 + \frac{3}{2}b^3 =$$

$$3a^3 - \frac{5}{2}a^2b - \frac{8}{2}\ ab^2 + \frac{3}{2}b^3 =$$

$$3a^3 - \frac{5}{2}a^2b - 4\ ab^2 + \frac{3}{2}b^3$$

DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO

Regola:
per dividere un polinomio per un monomio occorre DIVIDERE CIASCUN TERMINE del polinomio PER IL MONOMIO e poi addizionare algebricamente i monomi simili ottenuti.

Esempio:

$(24x^4 + 5xy - 12y^2) : (+\,2x) =$

$\left(\frac{24x^4}{2x}\right) + \left(\frac{5xy}{2x}\right) + \left(-\,\frac{12y^2}{2x}\right) =$

$12x^3 + \frac{5}{2}y - 6\,\frac{y^2}{x}$

Osservazione:
Se i termini del polinomio non sono tutti divisibili esattamente per il monomio, i quozienti parziali si scrivono sotto forma di frazione, eseguendo le possibili **SEMPLIFICAZIONI**.

Es. n.456

$(-\,\frac{2}{9}a^5x^3y^4 - a^4x^4y^4 + 2a^2x^5y^3 - \frac{1}{4}a^3x^4y^3) : (-\,\frac{1}{6}a^2x^3) =$

$+\,\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{1}\,\frac{a^5x^3y^4}{a^2x^3} + 1\cdot\frac{6}{1}\,\frac{a^4x^4y^4}{a^2x^3} - 2\cdot\frac{6}{1}\,\frac{a^2x^5y^3}{a^2x^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{1}\,\frac{a^3x^4y^3}{a^2x^3} =$

$+\,\frac{4}{3}a^3y^4 + 6a^2xy^4 - 12x^2y^3 + \frac{3}{2}axy^3$

Es. n. 451

$(-\,b^5x^7 + \frac{2}{5}b^6x^6 - \frac{1}{3}b^3x^4 - \frac{7}{15}bx) : (-\,bx) =$

$+\,b^4x^6 - \frac{2}{5}b^5x^5 + \frac{1}{3}b^2x^3 + \frac{7}{15}$

PRODOTTI NOTEVOLI

Def:

Si dicono **PRODOTTI NOTEVOLI** i risultati (calcolati con procedimenti abbreviati) della moltiplicazione di particolari polinomi.

1. QUADRATO DI UN BINOMIO

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- QUADRATO DEL PRIMO TERMINE
- DOPPIO PRODOTTO del primo per il secondo
- QUADRATO DEL SECONDO TERMINE.

Dimostrazione:

$$(A+B)^2 =$$

$$(A+B) \bullet (A+B) =$$

$$A^2 + AB + AB + B^2 =$$

$$A^2 + 2AB + B^2$$

Esempi:

$$\left(3a + 4b^3\right)^2 =$$

$$(3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 4b^3 + \left(4b^3\right)^2 =$$

$$= 9a^2 + 24ab^3 + 16b^6$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Dimostrazione:

$(a-b)^2 =$

$(a-b)(a-b) =$

$a^2 - ab - ab + b^2 =$

$a^2 - 2ab + b^2$

Esempio:

$(5a - 2b^3)^2 =$

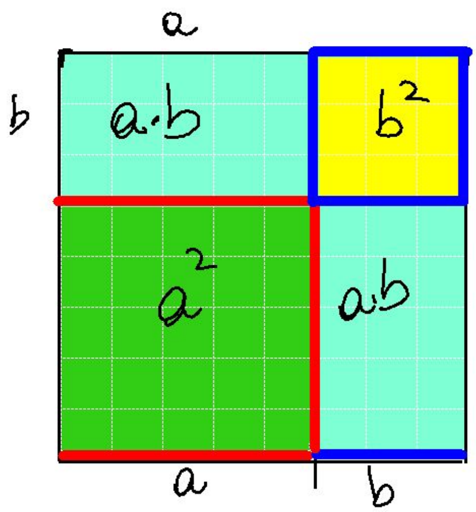
$= (5a)^2 - 2(5a)(2b^3) + (2b^3)^2 =$

$= 25a^2 - 20ab^3 + 4b^6$

In conclusione:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA:



Il quadrato di ***(a+b)*** equivale all'area di un quadrato di lato ***a*** + l'area di un quadrato di lato ***b*** + l'area di due rettangoli di base ***a*** e altezza ***b***.

2. PRODOTTO DELLA SOMMA PER LA DIFFERENZA FRA 2 MONOMI (*SOMMA PER DIFFERENZA*)

$(a+b)\bullet(a-b)=a^2-b^2$

Dimostrazione:

$(A+B)\bullet(A-B)=$

$=A^2-AB+\cancel{AB}-\cancel{B^2}=$

$=A^2-B^2$

Esempio:

$(2-5a)(2+5a)=$

applicando la prop. distributiva:

$4-10a+10a-25a^2=$

$=4-25a^2$

$\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{7}xy\right)\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{7}xy\right)=$

direttamente con la formula breve:

$\frac{1}{9}x^4-\frac{4}{49}x^2y^2$

3. CUBO DI UN BINOMIO

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

- Cubo del primo termine
- 3 volte il quadrato del primo per il secondo
- 3 volte il primo per il quadrato del secondo
- Cubo del secondo termine

Esempio:

$(2x^2 + 3y)^3 =$

$(2x^2)^3 + 3 \cdot (2x^2)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x^2 \cdot (3y)^2 + (3y)^3 =$

$8x^6 + 3 \cdot 4x^4 \cdot 3y + 3 \cdot 2x^2 \cdot 9y^2 + 27y^3 =$

$8x^6 + 36x^4 y + 54x^2 y^2 + 27y^3$

CUBO DI UNA DIFFERENZA DI DUE MONOMI:

$(a-b)^3 =+ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Esempio:

$(4x - 2y^2)^3 =$

$(4x)^3 + 3 \cdot (4x)^2 \bullet (-2y^2) + 3 \cdot 4x \cdot (-2y^2)^2 + (-2y^2)^3 =$

$+64x^3 - 3 \cdot 16x^2 \cdot 2y^2 + 3 \cdot 4x \cdot 4y^4 - 8y^6 =$

$64x^3 - 96x^2y^2 + 48xy^4 - 8y^6$

4. QUADRATO DI UN TRINOMIO

$$(a+b+c)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Esempio:

$(2a+3b+5c)^2 =$

$4a^2 + 9b^2 + 25c^2 + 2\cdot 2a\cdot 3b + 2\cdot 2a\cdot 5c + 2\cdot 3b\cdot 5c =$

$4a^2 + 9b^2 + 25c^2 + 12ab + 20ac + 30bc$

$$(a-b+c)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$(a+b-c)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a-b-c)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

Esempio:

$\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{3}y - 3z\right)^2 =$

$\frac{4}{25}x^4 + \frac{1}{9}y^2 + 9z^2 + 2 \bullet \frac{2}{5}x^2 \bullet \frac{1}{3}y - 2 \bullet \frac{2}{5}x^2 \cdot 3z - 2 \bullet \frac{1}{3}y \bullet 3z =$

$\frac{4}{25}x^4 + \frac{1}{9}y^2 + 9z^2 + \frac{4}{15}x^2y - \frac{12}{5}x^2z - 2yz$