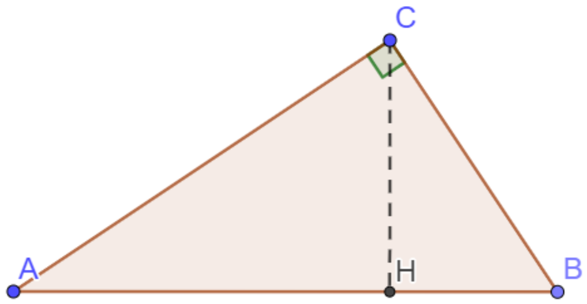
I teoremi di Euclide

Primo Teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.



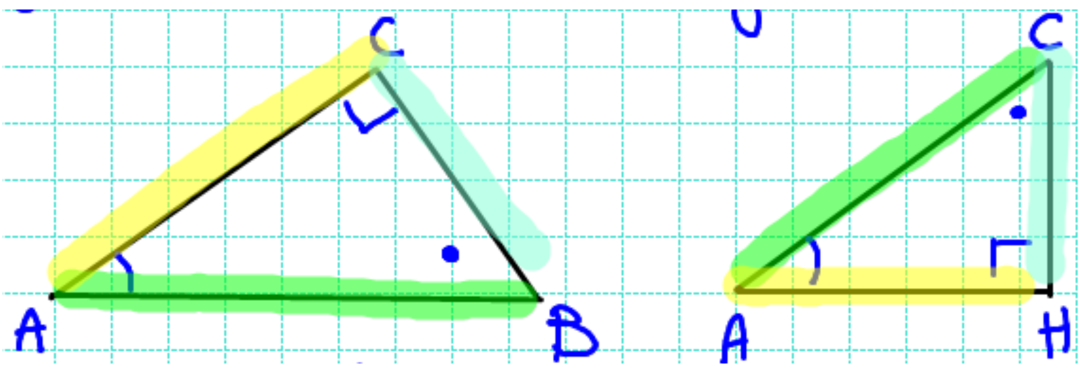
$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{AH}$$

$$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{BH}$$

DIMOSTRAZIONE

IPOTESI	TESI
ABC triangolo rettangolo	$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{AH}$

Dim. Considero i triangoli ABC e ACH:



Essi hanno:

$C\hat{A}B \cong C\hat{A}H$ perché è un angolo comune ai due triangoli

$A\hat{C}B \cong A\hat{H}C$ perché entrambi retti

$A\hat{B}C \cong A\hat{C}H$ perché complementari dello stesso angolo $\hat{A}$

→ per il primo criterio di similitudine ABC e AHC sono simili

Essendo simili i lati corrispondenti sono in proporzione, per cui $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{AH}$

CVD.

Nello stesso modo si può dimostrare la seconda proporzione $\overline{AB}:\overline{BC} = \overline{BC}:\overline{BH}$ prendendo in considerazione i triangoli ABC e BCH.

Interpretazione geometrica del primo teorema di Euclide

Per il primo teorema di Euclide abbiamo visto che vale la relazione

$$\overline{AB}:\overline{AC} = \overline{AC}:\overline{AH}$$

Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni (che afferma che il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi) si ottiene:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

Poiché $\overline{AC}^2$ corrisponde all'area del quadrato di lato $\overline{AC}$ e $\overline{AB} \cdot \overline{AH}$ corrisponde all'area del rettangolo di dimensioni $\overline{AB}$ e $\overline{AH}$ si può esprimere il teorema di Euclide in questo modo:

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo le cui dimensioni sono l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.