

Le quattro operazioni fondamentali

ADDIZIONE

Def:

Si dice ADDIZIONE l'operazione con la quale si calcola la somma; i numeri da addizionare si dicono **ADDENDI** e il risultato si dice **SOMMA o TOTALE**.

Proprietà:

1. **COMMUTATIVA**: la somma di due o più addendi non cambia cambiando l'ordine degli addendi.

Esempio:

$$3+4=7 \rightarrow 4+3=7$$

2. **ASSOCIATIVA**: la somma di tre o più addendi non cambia se, a due o più di essi si sostituisce la loro somma.

Es:

$$2+3+5+4 = (2+3) + (5+4) = 5 + 9 = 14$$

$$2+3+5+4 = 2+ (3+5) +4 = 2 + 8 + 4 = (2 + 8) +4 = 10 + 4 = 14$$

Es:

$$12 + 8 + 23 + 7 =$$

$$(12+8)+ (23+7)=$$

$$20 + 30 = 50$$

3. **DISSOCIATIVA**: la somma di due o più addendi non cambia se a uno o più addendi si sostituiscono altri addendi che hanno per somma l'addendo sostituito.

Esempio:

$$25 + 40 = (20 + 5) + (10 + 30) = 65$$

$$9 + 11 = 9 + 1+ 10 = 10 + 10 = 20$$

4. **ZERO è ELEMENTO NEUTRO**: la somma di zero e un qualsiasi numero è uguale a quel numero.

Esempio:

$$5 + 0 = 5$$

$$0 + 34 = 34$$

Regole di Calcolo:

1. Si dispongono gli addendi uno sotto l'altro in colonna, in modo che le cifre dello stesso ordine siano nella stessa colonna;

Es:

$$\begin{array}{r} 234 + \\ 51 = \\ \hline 285 \end{array}$$

2. Se gli addendi sono numeri decimali, si scrivono in colonna in modo che le virgole siano una sotto l'altra;

Es:

$$235,71 + 23,4 = \begin{array}{r} 235,71 + \\ 23,40 = \\ \hline 259,11 \end{array}$$

3. Per i calcoli rapidi si devono utilizzare le proprietà dell'addizione.

Es:

$$24 + 7 + 6 + 13 = \text{prop. commutativa}$$

$$(24 + 6) + (7 + 13) = \text{prop. associativa}$$

$$30 + 20 = 50$$

SOTTRAZIONE

Def:

Si dice **SOTTRAZIONE** l'operazione con la quale si calcola la differenza fra due numeri; il primo numero si dice **MINUENDO**, il secondo **SOTTRAENDO**. Il risultato si dice **DIFFERENZA** o RESTO.

OSSERVAZIONE: La sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione.

Proprietà:

1) INVARIANTIVA: se addizioniamo uno stesso numero al minuendo e al sottraendo, la differenza non cambia; se sottraiamo ad entrambi i termini uno stesso numero, non maggiore del sottraendo, la differenza non cambia.

Es:

$$12 - 4 = 8$$

$$(12+5) - (4+5) =$$

$$17 - 9 = 8$$

$$(12 + 10) - (4 + 10) =$$

$$22 - 14 = 8$$

$$(12 - 2) - (4 - 2) =$$

$$10 - 2 = 8$$

$$(12 - 3) - (4 - 3) =$$

$$9 - 1 = 8$$

si ottiene sempre lo stesso risultato!

2) LA SOTTRAZIONE NON HA L'ELEMENTO NEUTRO

Es:

$$5 - 0 = 5 \quad \text{ma} \quad 0 - 5 = -5$$

5 non è uguale a -5 e inoltre -5 non è un numero naturale (\mathbb{N}), ma è un numero **RELATIVO** (\mathbb{Z}).

Regole di Calcolo:

- 1) Con la proprietà invariantiva si può trasformare il sottraendo in un numero che termina con 0

Es:

$$23 - 17 =$$

$$(23+3) - (17 + 3) = \text{proprietà invariantiva}$$

$$26 - 20 = 6$$

$$47 - 31 =$$

$$(47 - 1) - (31 - 1) =$$

$$46 - 30 = 16$$

- 2) Per i calcoli in colonna bisogna allineare i numeri partendo da destra

Es:

$$\begin{array}{r} 327 - 213 = \\ \underline{213} \\ 114 \end{array}$$

- 3) Se numeri sono decimali, si devono incolonnare con le virgole una sotto l'altra e prima di fare i calcoli si devono pareggiare gli zeri.

Es.

$$\begin{array}{r} 12,5 - 8,75 = \\ \underline{8,75} \\ 3,75 \end{array}$$

MOLTIPLICAZIONE

Def:

Si dice **PRODOTTO** di due numeri il numero che si ottiene addizionando tanti addendi uguali al primo numero quante sono le unità del secondo numero.

I due numeri si dicono **FATTORI**, il risultato **PRODOTTO**.

Es:

$$4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = 12 \quad \text{4 e 3 sono i fattori; 12 è il prodotto}$$

Proprietà:

1) **COMMUTATIVA**: il prodotto di due fattori non cambia cambiando l'ordine dei fattori.

$$\text{Es: } 3 \cdot 6 = 6 \cdot 3 = 18$$

2) **ASSOCIATIVA**: il prodotto di tre o più fattori non cambia se a due o più di essi si sostituisce il loro prodotto.

Es:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10 =$$

$$(3 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 10) =$$

$$12 \cdot 20 = 240$$

3) **DISSOCIATIVA**: il prodotto di due o più fattori non cambia se, uno o più di essi vengono sostituiti da fattori, il cui prodotto sia uguale al fattore sostituito.

Es:

$$45 \cdot 20 = \quad \text{ propr. dissociativa}$$

$$45 \cdot 2 \cdot 10 = \quad \text{ propr. associativa}$$

$$90 \cdot 10 = 900$$

4) **DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA**: per moltiplicare una somma per un numero, si può moltiplicare ciascun addendo per quel numero e poi addizionare i prodotti ottenuti.

Es:

$$(4 + 3) \cdot 5 =$$

$$4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 =$$

$$20 + 15 = 35$$

5) **DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOTTRAZIONE:**

per moltiplicare una differenza per un numero, si può moltiplicare il minuendo e il sottraendo per quel numero ed eseguire la sottrazione fra i prodotti ottenuti.

Es:

$$(12 - 5) \cdot 3 =$$

$$12 \cdot 3 - 5 \cdot 3 =$$

$$36 - 15 = 21$$

6) **LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO**

il prodotto di due fattori è uguale a ZERO se almeno uno dei fattori è uguale a zero, e viceversa.

Es: $5 \cdot 0 = 0 \cdot 5 = 0$

7) **L'ELEMENTO NEUTRO È 1.**

Es: $3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3$

Regole di Calcolo:

1) Per moltiplicare un numero per 10, 100, 1000,... si scrivono alla destra del numero tanti zeri quanti sono gli zeri del secondo fattore.

Se il numero è decimale, si sposta la virgola verso destra di uno, due, tre,...posti.

Es:

$$27 \cdot 10 = 270 \quad \text{aggiungo uno zero}$$

$$27 \cdot 100 = 2700 \quad \text{aggiungo due zeri}$$

$$27 \cdot 1000 = 27000 \quad \text{aggiungo tre zeri}$$

$$3,5 \cdot 10 = 35 \quad \text{sposto la virgola di un posto verso } \rightarrow$$

$$3,5 \cdot 100 = 350 \quad \text{sposto la virgola di due posti verso } \rightarrow$$

$$3,5 \cdot 1000 = 3500 \quad \text{sposto la virgola di tre posti verso } \rightarrow$$

2) Le moltiplicazioni in colonna:

$$\begin{array}{r} 378 \cdot \\ 25 = \\ \hline 1890 + \\ 7560 = \\ \hline 9450 \end{array}$$

3) Le moltiplicazioni in colonna dei numeri decimali:

- Si calcola il prodotto come se le virgole non ci fossero;
- Si contano quanti numeri dopo la virgola ci sono in tutti i fattori;
- Si mette la virgola nel risultato, partendo a contare da destra.

Es:

$$\begin{array}{r} 2,74 \cdot \\ 3,5 = \\ \hline 1370 \\ 822 / \\ \hline 9,590, \\ \text{U} \end{array}$$

3 numeri
dopo la virgola
↓
sposto la virgola
di 3 posti nel
risultato

$$\Rightarrow 9,59$$

DIVISIONE

Def:

Si dice **QUOZIENTE ESATTO** o **QUOTO** fra due numeri naturali quel numero, se esiste, che moltiplicato per il secondo termine dà come risultato il primo.

Es:

$$24 : 4 = 6 \rightarrow 6 \cdot 4 = 24$$

$$120 : 10 = 12 \rightarrow 12 \cdot 10 = 120$$

$$16 : 2 = 8 \rightarrow 8 \cdot 2 = 16$$

OSSERVAZIONE: in questo caso si può dire che 16 è DIVISIBILE per 2, oppure che 16 è MULTIPLIO di 2.

Es:

24 è divisibile per 4 oppure 24 è multiplo di 4

120 è divisibile per 10 oppure 120 è multiplo di 10

Def:

Si dice **DIVISIONE** l'operazione con la quale si determina il **QUOZIENTE ESATTO** fra due numeri: il primo numero si dice **DIVIDENDO**, il secondo **DIVISORE**.

Es:

$$15 : 3 = 5$$

15 è il dividendo

3 è il divisore

5 è il quoziente o quoto

OSSERVAZIONE:

la DIVISIONE ESATTA è l'operazione inversa della moltiplicazione.

Es:

$$36 : 4 = 9 \rightarrow 9 \cdot 4 = 36 \text{ operazione inversa}$$

Proprietà:

- INVARIANTIVA: se moltiplichiamo dividendo e divisore per uno **stesso numero** diverso da zero, il quoziente non cambia. Se dividiamo dividendo e divisore per uno stesso numero, tale che sia un sottomultiplo di entrambi, il quoziente non cambia.

Es:

$$14 : 7 = (14 \cdot 2) : (7 \cdot 2) = 28 : 14 = 2$$

$$24 : 8 = 3 \text{ applico la proprietà } \rightarrow \text{divido per 2}$$

$$(24 : 2) : (8 : 2) =$$

$$12 : 4 = 3 \text{ il risultato è lo stesso}$$

non avrei potuto dividere per 3, perché 8 non è multiplo di 3!

Es:

$$150 : 15 = 10$$

→ Applico la prop. invariante:

$$(150 : 5) : (15 : 5) = \quad \text{abbiamo diviso per 5}$$

$$30 : 3 = 10$$

Non avrei potuto dividere per 2, perché 15 non è un multiplo di 2!

→ Applico la prop. invariante:

$$(150 \cdot 3) : (15 \cdot 3) = \quad \text{abbiamo moltiplicato per 3}$$

$$450 : 45 = 10$$

Avrei potuto moltiplicare per qualsiasi numero, tranne 0.

- **DISTRIBUTIVA della SOMMA RISPETTO alla DIVISIONE:** se tutti i termini di una somma sono divisibili per un numero, allora si può dividere ciascun termine per quel numero e poi addizionare i quozienti parziali ottenuti.

Es:

$$(24 + 8) : 2 =$$

$$(24 : 2) + (8 : 2) =$$

$$12 + 4 = 16$$

Es:

$$(27 + 9) : 3 =$$

$$(27 : 3) + (9 : 3) =$$

$$9 + 3 = 12$$

Attenzione: si può fare **solo** se tutti gli addendi sono divisibili per il divisore!

Es:

$$(27 + 9) : 2 = 36 : 2 = 18$$

Provo ad applicare la proprietà distributiva:

$$(27 : 2) + (9 : 2) =$$

non si può applicare perché gli addendi non sono divisibili per 2

- **DISTRIBUTIVA della SOTTRAZIONE rispetto alla DIVISIONE:** se tutti i termini di una differenza sono divisibili per un numero, allora si può dividere ciascun termine per quel numero e poi sottrarre dal primo quoziente ottenuto il secondo quoziente.

Es:

$$(25 - 10) : 5 = 15 : 5 = 3$$

Applico la proprietà:

$$(25 : 5) - (10 : 5) =$$

$$5 - 2 = 3$$

OSSERVAZIONI:

- a) Il quoziente fra due numeri uguali è 1.

$$a : a = 1$$

Es:

$$32 : 32 = 1$$

- b) Se il divisore è 1 il quoziente è uguale al dividendo.

$$a : 1 = a$$

Es:

$$32 : 1 = 32$$

- c) Se il dividendo è 0, il quoziente è 0.

$$0 : a = 0$$

Es:

$$0 : 32 = 0$$

- d) Se il divisore è 0, la divisione è **IMPOSSIBILE**

$$a : 0 = \textit{impossibile}$$

Es:

$7 : 0 = impossibile \rightarrow$ non esiste alcun numero che moltiplicato per 0 dia 7

NON SI PUÒ DIVIDERE PER ZERO!!

e) Se dividendo e divisore sono uguali a 0, il quoziente è **INDETERMINATO** (cioè può essere qualsiasi numero).

$0 : 0 = indeterminato (\forall x \in \mathbb{R})$

Es:

$0 : 0 = 5$ $0 : 0 = 23$ $0 : 0 = 2$

$0 : 0 = 12342482$

perché qualsiasi numero moltiplicato per 0 da 0.

Non si può determinare un numero preciso, quindi il risultato è INDETERMINATO.

f) Il numero 1 **NON** è l'elemento neutro della divisione, perché $4 : 1 = 4$ ma $1 : 4$ non è 4.

RIEPILOGO:

$0 : 5 = 0$

perché $0 \cdot 5 = 0$

$5 : 0 =$ **impossibile**

per

perché non esiste nessun numero che moltiplicato

0 dà come risultato 5

$0 : 0 =$ **indeterminato**

perché tutti i numeri moltiplicati per 0

danno come risultato 0

Regole di Calcolo della DIVISIONE

1. Dividere un numero naturale per 10, 100, 1000,... significa spostare la virgola verso sinistra di 1, 2, 3,posizioni.

Esempio:

$$723 : 10 = 72,3$$

$$147 : 100 = 1,47$$

$$2800 : 10 = 280,0 = 280$$

$$28,3 : 100 = 0,283$$

2. La divisione in colonna:

$$\begin{array}{r} 38 \\ 9 \overline{) 342} \\ \underline{- 27} \\ 72 \\ \underline{- 72} \\ 0 \end{array}$$

3. Divisione con numeri decimali: per dividere un numero decimale per un altro numero decimale, si deve eliminare la virgola nel DIVISORE (secondo termine), **moltiplicando per 10, 100, 1000,... entrambi i termini.**

Es:

$$18,34 : 2,8 = ?$$

→ Non si può avere la virgola nel **divisore**.

→ Si usa la **proprietà invariante** e si moltiplicano tutti i termini per 10.

$$(18,34 \cdot 10) : (2,8 \cdot 10) =$$

$$183,4 : 28 =$$

→ adesso si può fare la divisione!

ESPRESSIONI

Regole per calcolare un'espressione **SENZA PARENTESI**:

- **Prima** si calcolano le **MOLTIPLICAZIONI** e le **DIVISIONI**, dopo le **ADDIZIONI** e **SOTTRAZIONI**
- Quando ci sono tutte addizioni e sottrazioni si calcolano **NELL'ORDINE IN CUI SONO SCRITTE**.
- Quando ci sono più **MOLTIPLICAZIONI** e **DIVISIONI** di seguito, si calcolano **NELL'ORDINE IN CUI SONO SCRITTE**.

Regole di calcolo per espressioni con le parentesi:

- Si calcolano prima le **PARENTESI TONDE**, poi le **QUADRE** e dopo le **GRAFFE**.
- Si svolgono i calcoli seguendo le regole per le espressioni senza parentesi

DIVISIONE CON RESTO E QUOZIENTI APPROSSIMATI

Se la divisione non è esatta, ovvero non esiste un numero che moltiplicato per il divisore dia come risultato il dividendo, allora si ha un **RESTO**.

Esempio:

$$14 : 3 = 4 \text{ con resto } 2 \rightarrow (4 \cdot 3) + 2 = 12 + 2 = 14$$

ATTENZIONE: **il resto deve essere sempre più piccolo del divisore!!!**

- ➔ Un altro modo per eseguire una divisione non esatta è introdurre i **NUMERI DECIMALI**, ovvero i numeri con la virgola.

Es:

$$14:3=4,666666\dots$$

APPROSSIMAZIONI PER ECCESSO O PER DIFETTO

Il risultato di una divisione non esatta può essere un numero con tante cifre dopo la virgola.

Si può decidere se approssimare:

1. **PER ECCESSO:** si tolgono le cifre decimali fino all'ordine deciso e si aumenta di uno l'ultima cifra rimasta.

Es:

$$14:3=4,6666\dots=4,67$$

2. **PER DIFETTO:** si tolgono le cifre decimali fino all'ordine deciso, senza aumentare l'ultima cifra rimasta.

Es:

$$14:3=4,6666\dots=4,66$$