

# SOLIDI DI ROTAZIONE

## 1. CILINDRO

**Def:**

si dice cilindro un solido ottenuto dalla rotazione completa di un rettangolo attorno ad un suo asse.

Raggio del cilindro = raggio della circonferenza di base

Altezza = distanza tra le due basi

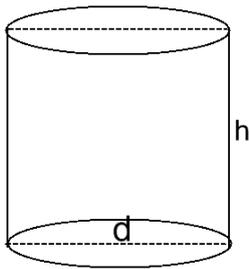
Perimetro di base = circonferenza

Area di base = cerchio

**Def:**

un cilindro si dice EQUILATERO se il diametro di base è congruente all'altezza:

$$h = 2r = d$$



PERIMETRO DI BASE:  $P_b = C = 2r\pi$

AREA DI BASE:  $A_b = A_c = r^2\pi$

AREA LATERALE:  $A_l = P_b \cdot h = 2r\pi \cdot h = 2r\pi h$

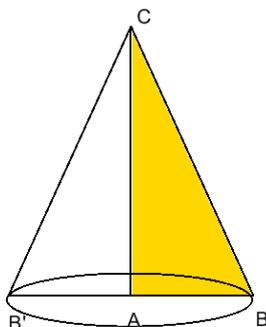
AREA TOTALE:  $A_t = A_l + 2A_b = 2r\pi h + 2r^2\pi = 2r\pi(h + r)$

VOLUME:  $V = A_b \cdot h = r^2\pi h$

## 2. CONO

**Def:**

è un solido di rotazione ottenuto dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno ad uno dei suoi cateti.



$r$  = raggio di base =  $AB$  (cateto)

$a$  = apotema del cono =  $BC$  (ipotenusa del triangolo)

$h$  = altezza del cono =  $AC$  (cateto su cui ruota)

Per il triangolo generatore, vale il Teorema di Pitagora:

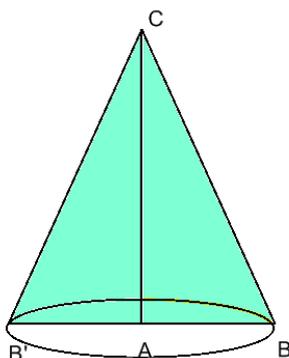
$$a = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$r = \sqrt{a^2 - h^2}$$

$$h = \sqrt{a^2 - r^2}$$

**Def:**

si dice CONO EQUILATERO un cono che ha il DIAMETRO congruente all'APOTEMA, ovvero il triangolo  $B\hat{C}B'$  è un triangolo EQUILATERO, ovvero il triangolo generatore è RETTANGOLO con un angolo di  $30^\circ$  (e uno di  $60^\circ$ ).



$$a \cong 2r \cong d$$

$$h = r\sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

## AREA E VOLUME

$$A_b = r^2\pi$$

$$A_l = \frac{P_b \cdot a}{2} = \frac{2r\pi \cdot a}{2} = r\pi a$$

$$A_t = A_b + A_l = r^2\pi + r\pi a = r\pi(r + a)$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{r^2\pi \cdot h}{3}$$

Formule inverse

$$A_b = r^2\pi \rightarrow r = \sqrt{\frac{A_b}{\pi}}$$

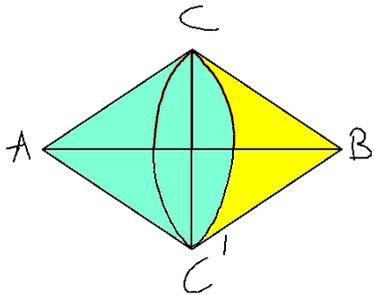
$$A_l = r\pi a \rightarrow r = \frac{A_l}{a\pi} \quad a = \frac{A_l}{r\pi}$$

$$A_t = A_b + A_l \rightarrow A_b = A_t - A_l$$

$$A_l = A_t - A_b$$

$$V = \frac{r^2\pi \cdot h}{3} \rightarrow r = \sqrt{\frac{V \cdot 3}{\pi h}} \quad h = \frac{V \cdot 3}{r^2\pi}$$

### 3. Rotazione completa di un TRIANGOLO ISOSCELE intorno alla base



Si genera un solido composto da due coni CONGRUENTI con la base in comune:

raggio del cono = altezza triangolo isoscele

apotema del cono = lato obliquo del triangolo

altezza del cono = metà base del triangolo

$$\text{Volume del solido} = 2 \cdot V_{\text{cono}} = 2 \cdot \frac{r^2 \pi \cdot h}{3}$$

$$\text{Area totale del solido} = 2 \cdot A_{l_{\text{cono}}} = 2 \cdot r \pi a$$

**Formule inverse**

$$V = 2 \cdot \frac{r^2 \pi \cdot h}{3} \rightarrow r = \sqrt{\frac{V \cdot 3}{2 \pi \cdot h}}$$

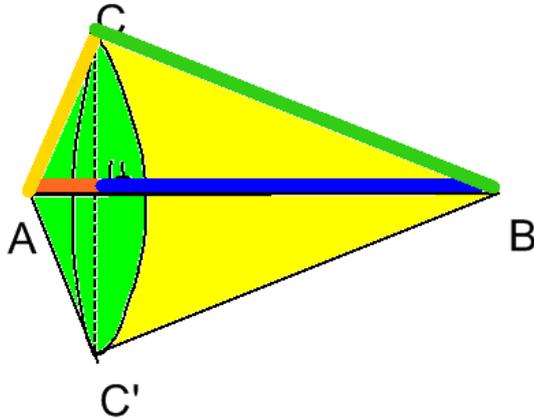
$$h = \frac{V \cdot 3}{2 r^2 \pi}$$

$$A_t = 2 \cdot r \pi a \rightarrow r = \frac{A_t}{2 \pi a}$$

$$a = \frac{A_t}{2 \pi r}$$

#### 4. Rotazione completa di un TRIANGOLO RETTANGOLO intorno all'ipotenusa.

Il solido è formato da due **coni diversi** tra loro, che hanno la stessa base.



**Cono 1: ACC'**

$r = CH =$  altezza del triangolo

$a = AC =$  cateto minore del triangolo

$h = AH =$  proiezione del cateto minore sull'ipotenusa.

**Cono 2: BCC'**

$r = CH =$  altezza del triangolo

$a = BC =$  cateto maggiore del triangolo

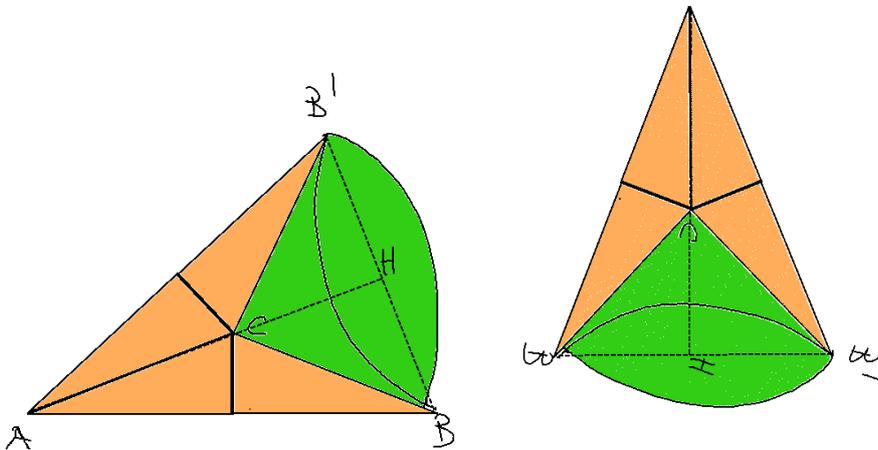
$h = BH =$  proiezione del cateto maggiore sull'ipotenusa.

$$A_t = A_{l1} + A_{l2} = CH \cdot \pi \cdot AC + CH \cdot \pi \cdot BC = CH \cdot \pi (AC + BC)$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{CH^2 \pi \cdot AH}{3} + \frac{CH^2 \pi \cdot BH}{3} = \frac{CH^2 \pi}{3} \cdot (AH + BH)$$

$$= \frac{CH^2 \pi \cdot AB}{3}$$

## 5. Rotazione completa di un triangolo qualsiasi intorno ad un suo lato



Questo solido è dato da un cono grande con all'interno un cono più piccolo, avente la stessa base:

raggio di base = altezza del triangolo rispetto al lato su cui ruota

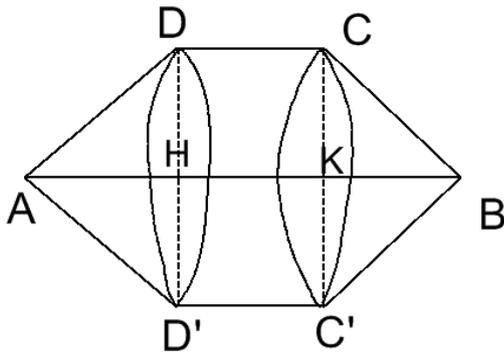
altezza cono grande = AH

altezza cono piccolo = CH

$$V = V_{cg} - V_{cp}$$

$$A_t = A_{lg} + A_{lp}$$

## 6. Rotazione completa di un TRAPEZIO ISOSCELE attorno alla BASE MAGGIORE.



Il solido è formato da un CILINDRO e da 2 CONI CONGRUENTI.

CONO 1 = CONO 2:

$r = DH$  (altezza del trapezio)

$a = AD$  (lato obliquo del trapezio)

$h = AH$  (proiezione del lato obliquo sulla base maggiore)

CILINDRO:

$r = DH$  (altezza del trapezio)

$h = HK = CD$  (base minore del trapezio)

$$A_t = 2 \cdot A_{l_{cono}} + A_{l_{cilindro}} =$$

$$2 \cdot DH \cdot \pi \cdot AD + 2 \cdot DH \cdot \pi \cdot CD =$$

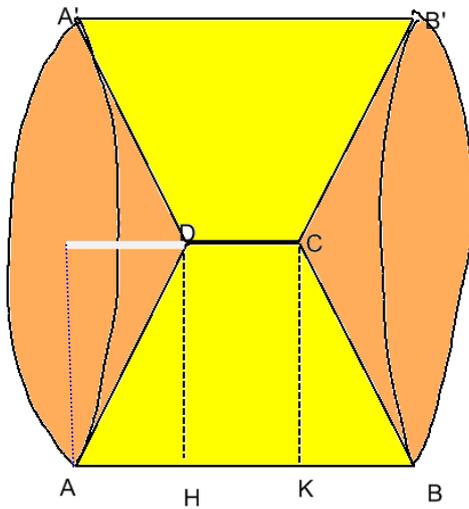
$$2 \cdot DH \cdot \pi \cdot (AD + CD)$$

$$V = 2 \cdot V_{cono} + V_{cilindro} =$$

$$2 \cdot \frac{DH^2 \pi \cdot AH}{3} + DH^2 \pi \cdot CD =$$

$$DH^2 \pi \cdot \left( \frac{2}{3} AH + CD \right)$$

## 7. Rotazione completa di un TRAPEZIO ISOSCELE attorno alla BASE MINORE.



Il solido è formato da un CILINDRO che presenta due cavità a forma di CONO congruenti.

CILINDRO:

$$r = DH \text{ (altezza trapezio)}$$

$$h = AB \text{ (base maggiore trapezio)}$$

CONO:

$$r = DH \text{ (altezza trapezio)}$$

$$h = AH \text{ (proiezione lato obliquo su base maggiore)}$$

$$a = AD \text{ (lato obliquo)}$$

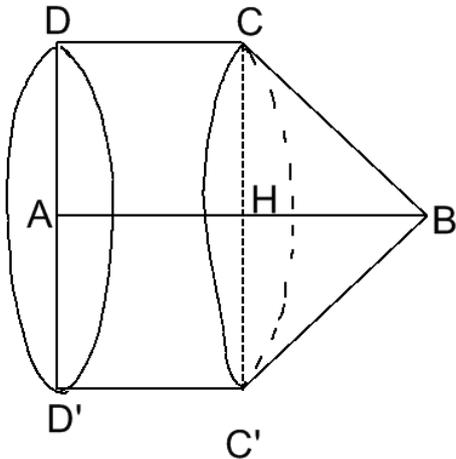
$$A_t = A_{l_{cilindro}} + 2 \cdot A_{l_{cono}} = 2 \cdot DH \cdot \pi \cdot AB + 2 \cdot DH \cdot \pi \cdot AD =$$

$$= 2 \cdot DH \cdot \pi \cdot (AB + AD)$$

$$V = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cono} = DH^2 \pi \cdot AB - 2 \cdot \frac{DH^2 \pi \cdot AH}{3} =$$

$$= DH^2 \pi \cdot (AB - \frac{2}{3} AH)$$

## 8. Rotazione completa di un TRAPEZIO RETTANGOLO attorno alla BASE MAGGIORE.



Il solido è formato da un CILINDRO e da un CONO con la stessa base.

CILINDRO:

$r = AD$  (altezza trapezio = lato obliquo perpendicolare)

$h = CD$  (base minore trapezio)

CONO:

$r = CH = AD$  (altezza trapezio)

$a = BC$  (lato obliquo non perpendicolare)

$h = HB$  (proiezione lato obliquo sulla base maggiore) =  $AB - CD$

$$A_t = A_{b_{cilindro}} + A_{l_{cilindro}} + A_{l_{cono}} =$$

$$= AD^2 \cdot \pi + 2 \cdot AD \cdot \pi \cdot CD + AD \cdot \pi \cdot BC =$$

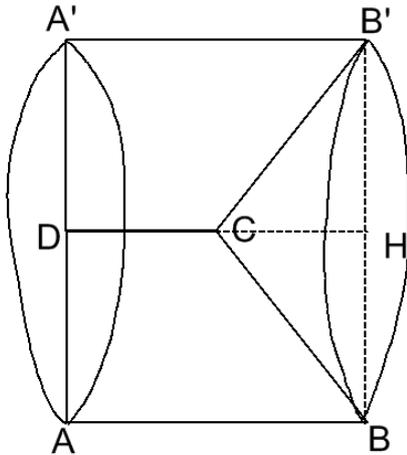
$$= AD \cdot \pi \cdot (AD + 2 \cdot CD + BC)$$

$$V = V_{cilindro} + V_{cono} =$$

$$= AD^2 \cdot \pi \cdot CD + \frac{AD^2 \cdot \pi \cdot HB}{3} =$$

$$= AD^2 \cdot \pi \cdot \left( CD + \frac{HB}{3} \right)$$

## 9. Rotazione completa di un TRAPEZIO RETTANGOLO attorno alla BASE MINORE.



Il solido è formato da un CILINDRO con una cavità a forma di CONO, con la stessa base.

CILINDRO:

$r = AD$  (altezza trapezio = lato obliquo perpendicolare)

$h = AB$  (base maggiore trapezio)

CONO:

$r = BH = AD$  ( altezza trapezio)

$a = BC$  (lato obliquo non perpendicolare)

$h = CH$  (base maggiore – base minore) =  $AB - CD$

$$A_t = A_{b_{cilindro}} + A_{l_{cilindro}} + A_{l_{cono}} =$$

$$= AD^2 \cdot \pi + 2 \cdot AD \cdot \pi \cdot AB + AD \cdot \pi \cdot BC =$$

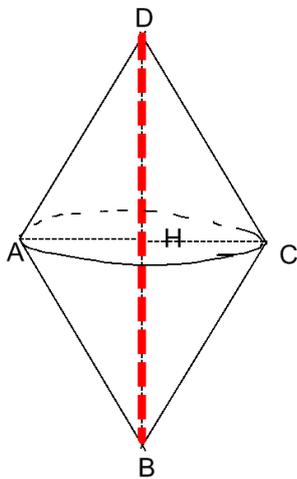
$$= AD \cdot \pi \cdot (AD + 2 \cdot AB + BC)$$

$$V = V_{cilindro} - V_{cono} =$$

$$= AD^2 \cdot \pi \cdot AB - \frac{AD^2 \cdot \pi \cdot CH}{3} =$$

$$= AD^2 \cdot \pi \cdot \left( AB - \frac{CH}{3} \right)$$

## 10. Rotazione di 180 gradi di un ROMBO attorno ad una sua diagonale.



Il solido generato è la SOMMA di due CONI congruenti, aventi la base in comune:

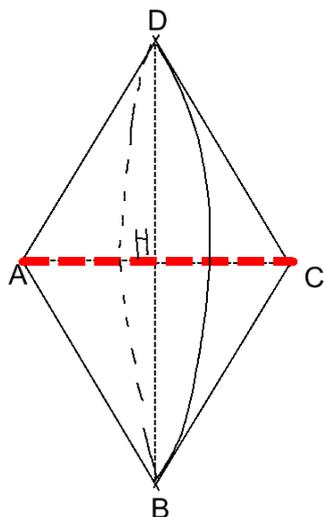
$$r = AH = \frac{AC}{2} \text{ (metà diagonale minore)}$$

$$h = DH = \frac{BD}{2} \text{ (metà diagonale maggiore)}$$

$$a = AD \text{ (lato del rombo)}$$

$$A_t = 2 \cdot A_l = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot a$$

$$V_t = 2 \cdot V = 2 \cdot \frac{r^2 \pi h}{3}$$



**CONO:**

$$h = AH = \frac{AC}{2} \text{ (metà diagonale minore)}$$

$$r = DH = \frac{BD}{2} \text{ (metà diagonale maggiore)}$$

$$a = AD \text{ (lato del rombo)}$$